Méthodologie de la programmation

Pablo Rauzy

pr@up8.edu

pablo.rauzy.name/teaching/mdlp

UNIVERSITÉ PARIS 8 VINCENNES-SAINT-DENIS

UFR MITSIC / L1 informatique

Séance a

Un peu de logique

Un peu de logique

- L'*algèbre de Boole*, ou calcul booléen, ou logique booléenne, est une approche algébrique de la logique, vu en terme de variables, d'opérateurs, et de fonctions, particulièrement utile en informatique.
- Elle fut initiée en 1854 par le mathématicien britannique George Boole.
- On s'intéresse aujourd'hui seulement au cas avec deux éléments.

- On appelle $\mathbb{B}$ l'ensemble constitué des deux *valeurs de vérité*, **vrai** et **faux**.
- Le plus souvent on note
  - $\mathbb{B} = \{\top, \bot\}$, ou
  - $\mathbb{B} = \{1, 0\}$.

- On définit plusieurs opérations de base sur $\mathbb{B}$:
  - la conjonction,
  - la disjonction, et
  - la négation.

Conjonction

- La *conjonction* est l'opération **et**.
- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note la conjonction de a et b
  - a AND b,
  - a & b,
  - $a \wedge b$,
  - $a \cdot b$, ou simplement
  - ab.
- La table de vérité de cette opération est

Conjonction

- La *conjonction* est l'opération **et**.
- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note la conjonction de a et b
  - a AND b,
  - a & b,
  - $a \wedge b$,
  - $a \cdot b$, ou simplement
  - ab.
- La table de vérité de cette opération est

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjonction

- La *disjonction* est l'opération **ou**.
- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note la disjonction de a et b
  - a OR b,
  - $a \mid b$,
  - $a \vee b$, ou
  - $a + b$.
- La table de vérité de cette opération est

Disjonction

- La *disjonction* est l'opération **ou**.
- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note la disjonction de a et b
  - a OR b,
  - $a \mid b$,
  - $a \vee b$, ou
  - $a + b$.
- La table de vérité de cette opération est

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Négation

- La *négation* est l'opération **non**.
- Si on a une variable $a \in \mathbb{B}$, on note la négation de a
  - NOT a,
  - $!\,a$,
  - $\neg a$, ou
  - $\overline{a}$.
- La table de vérité de cette opération est

Négation

- La *négation* est l'opération **non**.
- Si on a une variable $a \in \mathbb{B}$, on note la négation de a
  - NOT a,
  - $!\,a$,
  - $\neg a$, ou
  - $\overline{a}$.
- La table de vérité de cette opération est

a	$\overline{a}$
0	1
1	0

- En tant que structure, une algèbre de Boole est un *corps*.
- On y retrouve donc les propriétés de ce type de structure.

Associativité

- $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$

Commutativité

- $a + b = b + a$
- $a \cdot b = b \cdot a$

Distributivité

- $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
- $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

Idempotence

- $a + a = a$
- $a \cdot a = a$

Neutralité

- $a + 0 = a$
- $a \cdot 1 = a$

Absorption

- $a \cdot 0 = 0$
- $a + 1 = 1$

Complémentarité

- $\overline{\overline{a}} = a$
- $a \cdot \overline{a} = 0$
- $a + \overline{a} = 1$

1. Simplifier les formules suivantes :
   - $a + \overline{a} \cdot b$
   - $a \cdot (\overline{a} + b)$
2. Démontrer la loi d'absorption :
   - $a + (a \cdot b) = a \cdot (a + b) = a$
3. Démontrer le théorème du consensus :
   - $a \cdot b + \overline{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \overline{a} \cdot c$

- Les lois de De Morgan sont des identités entre propositions logiques.
- Elles disent :
  1. La négation de la conjonction de deux formules est équivalente à la disjonction des négations de ces deux formules.
  2. La négation de la disjonction de deux formules est équivalente à la conjonction des négations de ces deux formules.
- Autrement dit, $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$, et $\overline{a + b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$.

- Certaines opérations booléennes peuvent être définies en fonction de celles qu'on a déjà vu :
  - le ou exclusif,
  - l'implication, et
  - l'équivalence.

Ou exclusif

- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note le **ou exclusif** de a et b
  - a XOR b,
  - a ^ b ou
  - $a \oplus b$.
- La table de vérité de cette opération est

- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note le **ou exclusif** de a et b
  - a XOR b,
  - a ^ b ou
  - $a \oplus b$.
- La table de vérité de cette opération est

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note l'**implication** de a sur b
  - $a \Rightarrow b$.
- La table de vérité de cette opération est

Implication

- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note l'**implication** de a sur b
  - $a \Rightarrow b$.
- La table de vérité de cette opération est

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Équivalence

- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note l'**équivalence** de a et b
  - $a \Leftrightarrow b$.
- La table de vérité de cette opération est

Équivalence

- Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note l'**équivalence** de a et b
  - $a \Leftrightarrow b$.
- La table de vérité de cette opération est

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1. Vérifier les lois de De Morgan à l'aide d'une table de vérité.
2. En utilisant seulement **et**, **ou**, et **non** :
   - exprimer $a \Rightarrow b$,
   - exprimer $a \Leftrightarrow b$.
3. Démontrer que $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \cdot (b \Rightarrow a)$.
4. (Bonus) Montrer qu'on peut tout faire avec juste NAND ($a \uparrow b = \overline{a \cdot b}$).

- Une *formule* est soit une formule atomique, soit une formule composée.
- Une formule atomique peut être :
  - $\top$ (vrai),
  - $\bot$ (faux),
  - une variable booléenne,
  - un *prédicat*.
- Si P et Q sont des formules, alors sont des formules composées :
  - $\neg P$,
  - $P \wedge Q$,
  - $P \vee Q$,
  - $P \Rightarrow Q$,
  - $P \Leftrightarrow Q$.
  - une formule *quantifiée*.

- Un *prédicat* est une propriété.
- Par exemple :
  - le prédicat d'égalité sur les entiers : $x = 42$, $y = 51$;
  - le prédicat d'appartenance sur les ensembles : $n \in A$;
  - le prédicat $couleur$ sur les choses : $Couleur(ciel, \mathrm{bleu})$, $Couleur(corbeau, \mathrm{noir})$.
- Ici, les entiers et le terme noir sont des constantes.

- Il existe deux quantificateurs :
  - le quantificateur existentiel, et
  - le quantificateur universel.

Quantificateur existentiel

- Le quantificateur existentiel se note $\exists$.
- Si P est une formule, alors “$\exists x, P$” signifie qu'il existe un x tel que P est vraie.
- Exemples :
  - Sur les booléens : $\exists a, a \vee b$.
  - Sur les entiers : $\exists n, n < 13$.

Quantificateur universel

- Le quantificateur universel se note $\forall$.
- Si P est une formule, alors “$\forall x, P$” signifie que P est vrai pour tout x.
- Exemples :
  - Sur les booléens : $\forall a, a \vee 1$.
  - Sur les entiers : $\forall n, \exists m, n < m$.

Variables libres et variables liées

- Dans une formule, une variable est soit *libre* soit *liée* par un quantificateur.
- Par exemple dans la formule "$\exists a, a \vee b$" :
  - la variable a est liée, et
  - la variable b est libre.

Négation

- La négation d'une formule quantifiée par un quantificateur est la négation de cette formule quantifiée par l'autre quantificateur :
  - $\neg(\exists x, P) = \forall x, \neg P$,
  - $\neg(\forall x, P) = \exists x, \neg P$.
- Exemples :
  - $\neg(\exists x, f(x) = 0)$
    $= \forall x, f(x) \neq 0$.
  - $\neg(\forall n, \exists m, n < m)$
    $= \exists n, \neg(\exists m, n < m)$
    $= \exists n, \forall m, \neg(n < m)$
    $= \exists n, \forall m, n \geq m$.

- Attention, l'implication logique n'est pas complètement intuitive !
- L'implication $P \Rightarrow Q$ exprime que :
  - Q est une *condition nécessaire* de P (mais pas forcément *suffisante*), et que
  - P est une *condition suffisante* de Q (mais pas forcément *nécessaire*).
- Par exemple l'implication « Si il pleut alors le sol est mouillé. »
  signifie qu'il n'est pas possible qu'il pleuve sans que le sol ne soit mouillé.
  Par contre, il est tout à fait possible que le sol soit mouillé sans qu'il ne pleuve.

Négation

- La *négation* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est la formule $P \land \neg Q$.
- En effet, on a vu que $P \Rightarrow Q = \neg P \lor Q$,
  et par les lois de De Morgan on a que $\neg(\neg P \lor Q) = \neg\neg P \land \neg Q$.
- La négation de « Si il pleut alors le sol est mouillé. »
  est donc « Il pleut et le sol n'est pas mouillé. ».

Réciproque

- La *réciproque* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.
- La réciproque de « Si il pleut alors le sol est mouillé. »
  est donc « Si le sol est mouillé alors il pleut. ».
- La réciproque d'une implication n'est pas équivalente à cette implication.

Contraposée

- La *contraposée* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- La contraposée de « Si il pleut alors le sol est mouillé. »
  est donc « Si le sol n'est pas mouillé alors il ne pleut pas. ».
- La contraposée d'une implication est équivalente à cette implication.

1. Les énoncés suivants sont-ils des formules ?
   - $\top$,
   - 17,
   - $(\bot \Rightarrow a) \land (a \Rightarrow \top)$,
   - $\forall x, Corbeau(x) \Rightarrow Couleur(x, \text{noir})$.
2. Dans les deux derniers énoncés, quelles sont les variables ? Sont-elles libres ou liées ?
3. Quelle est la négation du dernier énoncé ?
4. En oubliant son quantificateur, quelle est sa réciproque ? Et sa contraposée ?
5. Soit E la formule vraie quand les éoliennes tournent, et V la formule vraie quand le vent souffle.
   - Quelle formule est vraie : $E \Rightarrow V$, $V \Rightarrow E$, ou $E \Leftrightarrow V$? (et en français ?)
   - Quelle est la négation de la formule vraie ? (en formule et en français)
   - Quelle est sa réciproque ? Et sa négation ? (idem)
   - Quelle est sa contraposée ? Et sa négation ? (idem)