



# Histoire de l'informatique

## Chapitre 5 Histoire de la logique



Pablo Rauzy <pr@up8.edu>  
pablo.rauzy.name/teaching/hi

# Histoire de la logique

---

- ▶ La *logique* est l'étude du raisonnement.
- ▶ Elle est à l'origine une branche de la philosophie (au sens grec).
- ▶ À partir du 19ème siècle se développe une approche mathématique de la logique.
- ▶ Depuis, son rapprochement avec l'informatique a fortement relancé son développement (ou c'est l'inverse ?).
- ▶ Les branches actuelles de la logiques sont
  - la théorie des ensembles,
  - la théorie de la démonstration,
  - la théorie des modèles,
  - la théorie de la calculabilité, et
  - la théorie des types.

- ▶ La *logique* est l'étude du raisonnement.
- ▶ Elle est à l'origine une branche de la philosophie (au sens grec).
- ▶ À partir du 19ème siècle se développe une approche mathématique de la logique.
- ▶ Depuis, son rapprochement avec l'informatique a fortement relancé son développement (ou c'est l'inverse ?).
- ▶ Les branches actuelles de la logiques sont
  - la théorie des ensembles,
  - la théorie de la démonstration,
  - la théorie des modèles,
  - la théorie de la calculabilité, et
  - la théorie des types.
- ▶ Attention : l'histoire de la logique est longue et compliquée.
- ▶ Aujourd'hui, on ne s'intéresse qu'à une vision partielle et subjective d'informaticien, parfois réductrice et certainement simpliste.
- ▶ Cette séance devrait peut-être plutôt s'appeler "un peu d'histoire *via* la logique".

- ▶ Les bases de la logique qui ont été formalisées par Aristote et Euclide perdurent jusqu'à aujourd'hui.
- ▶ Aristote cherche à analyser les formes de pensée permettant de construire un discours (*logos*) philosophique cohérent.
- ▶ Euclide, dans ses *Éléments*, cherche "juste" à fonder un corpus logique suffisant pour les mathématiques.
  - Les éléments fondamentaux qu'il appelle « notion ordinaire » ou postulat sont spécifiques aux mathématiques, par exemple « Un segment de droite peut être tracé en joignant deux points quelconques. ».
  - Ils ne peuvent prétendre à la généralité que couvre la logique d'Aristote, qui est essentiellement à finalité philosophique.

- ▶ À partir de la Renaissance, la science de manière générale subit un profond bouleversement : la révolution copernicienne.
- ▶ Les systèmes formels ne résistent pas au besoin du développement de la science.
- ▶ On fait alors une plus grande place à l'intuition et surtout à l'empirisme.
- ▶ Au siècle des Lumières, on appelle « raison éclairée de l'homme » l'approche qui construit sur l'expérience et l'induction.

- ▶ Pendant la première moitié du 19ème siècle, la logique, héritée de la Grèce antique, est vue comme un outil philosophique.
- ▶ C'est durant le 19ème siècle que naît vraiment la logique mathématique.
- ▶ D'un côté il y a une volonté (Frege, Russel, Peano, Zermelo, Hilbert, ...) de donner une fondation axiomatique aux mathématiques, de l'autre Boole introduit des structures algébriques permettant de définir un *calcul de vérité*.
- ▶ L'idée commence alors à s'installer que *le langage mathématique peut se définir mathématiquement, et donc être un objet d'étude des mathématiques*.
- ▶ Apparition du dualisme *syntaxe* / *sémantique*.

- ▶ En 1847, Boole publie son algèbre.
- ▶ La même année, De Morgan publie ses lois.
- ▶ La logique devient une branche à part entière des mathématiques.



- ▶ En 1879, Frege publie *Begriffsschrift (Idéographie)*, un langage entièrement formalisé qui a pour but de représenter de manière parfaite la logique mathématique.
- ▶ Cette clarification permet de mettre en avant les trois caractéristiques qu'une théorie mathématique devrait avoir :
  - la cohérence,
  - la complétude, et
  - la décidabilité.

- ▶ Au début des années 1880, Cantor introduit la *théorie des ensembles*.
- ▶ L'idée fondamentale est de définir l'*équipotence*.
  - Deux ensembles sont équipotents lorsqu'il existe une bijection entre eux.
  - Cette notion permet de définir la cardinalité, c'est-à-dire le nombre d'éléments d'un ensemble, qu'il soit fini ou infini.
- ▶ La théorie de Cantor met en avant le cas des ensembles infinis, objets aux propriétés particulières qui demandent une nouvelle approche.
- ▶ Cantor a approfondi la théorie et a construit des hiérarchies infinies d'ensembles infinis : les nombres ordinaux et les nombres cardinaux.
- ▶ La théorie de Cantor est considérée comme « naïve » parce qu'elle n'emploie pas encore une axiomatique précise, et parce que pour lui il n'y avait qu'une seule théorie des ensembles, un seul univers ensembliste attendu.

- ▶ En 1898, Hilbert propose de réduire l'arithmétique à la logique. Son but est de montrer que les nombres sont des objets qui se déduisent d'un système d'axiomes non-contradictaires.
- ▶ En 1900, Hilbert présente son fameux programme en 23 questions pour le siècle à venir, dont la deuxième est :

*« Peut-on prouver la cohérence de l'arithmétique ? En d'autres termes, peut-on démontrer que les axiomes de l'arithmétique ne sont pas contradictoires et, subséquemment, sont-ils indépendants ? »*

- ▶ Le paradoxe de Russel (1902) est l'instance la plus facilement compréhensible de la série de problèmes et paradoxes que pose la théorie naïve des ensembles (et similairement, l'idéographie).
- ▶ Le paradoxe de Russel consiste en la construction de l'ensemble des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes.
- ▶ Mathématiquement, si on pose  $P = \{E \mid E \notin E\}$ , on a immédiatement que  $P \in P \iff P \notin P$ .
- ▶ De manière plus imagée, il s'agit du paradoxe du barbier qui rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, qu'on peut résoudre en affirmant qu'un tel barbier ne peut exister.

- ▶ Le paradoxe de Russel (1902) est l'instance la plus facilement compréhensible de la série de problèmes et paradoxes que pose la théorie naïve des ensembles (et similairement, l'idéographie).
- ▶ Le paradoxe de Russel consiste en la construction de l'ensemble des ensembles qui n'appartiennent pas à eux-mêmes.
- ▶ Mathématiquement, si on pose  $P = \{E \mid E \notin E\}$ , on a immédiatement que  $P \in P \iff P \notin P$ .
- ▶ De manière plus imagée, il s'agit du paradoxe du barbier qui rase tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, qu'on peut résoudre en affirmant qu'un tel barbier ne peut exister.
- ▶ En théorie des ensembles c'est plus compliqué.
  - Il est naturel de considérer que toute propriété exprimable définit un ensemble : celui des objets qui satisfont la propriété (c'est le *principe de compréhension*).
  - Mais si on admet ce principe, alors on doit admettre l'existence de l'ensemble paradoxal.

## Diagonalisation

- ▶ La démonstration du paradoxe de Russel repose sur une *diagonalisation*.
  - Il s'agit d'un genre de démonstration par l'absurde.
  - Le principe est d'avoir une autoréférence et une négation (« Je mens. »).
- ▶ Elle est de fait très semblable à la démonstration du *théorème de Cantor* (1891).
  - Le théorème de Cantor dit que le cardinal d'un ensemble  $E$  est toujours strictement inférieur au cardinal de l'ensemble de ses parties  $P(E)$ .
  - L'idée est de montrer qu'il n'existe pas de bijection  $f : E \rightarrow P(E)$ .
  - Pour cela, on construit un ensemble  $D = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$  qui n'a pas d'antécédent (c'est à dire qu'il y a pas d'élément  $e \in E$  tel que  $D = f(e)$ ).
  - En effet, si on suppose le contraire, soit  $e$  est dans  $D$  et donc n'appartient pas à  $D$  ; soit  $e$  n'est pas dans  $D$  et donc appartient à  $D$ .
  - Il n'existe donc aucune fonction surjective de  $E$  dans  $P(E)$ .
- ▶ La conséquence de ce théorème est qu'il n'existe pas de plus grand cardinal (paradoxe de Cantor).

- ▶ Ces histoires de paradoxes dans ce qui se veut être les fondations des mathématiques provoquent le début de ce qu'on appelle la *crise des fondements*.
- ▶ En effet, la cohérence des mathématiques est sous la menace du *principe d'explosion* (« *ex falso quodlibet* »).
- ▶ Du coup, plus aucune prédiction ne peut être réalisée par le calcul de l'évolution d'un système physique puisque n'importe quel calcul contradictoire et incompatible devenait possible.

- ▶ En 1908, Russel présente la *théorie des types* comme une solution à son paradoxe (une autre solution basée sur la restriction du principe de compréhension est due à Zermelo, la même année).
- ▶ Dans cette théorie, les ensembles sont hiérarchisés par leur type : les éléments d'un ensemble ne peuvent être que des objets (possiblement des ensembles) de type strictement inférieur à celui de l'ensemble initial.
- ▶ Cela abouti aux *Principia Mathematica*, de Russell et Whitehead.
- ▶ Cela résout effectivement le paradoxe en limitant les propriétés exprimables, et en fait un candidat à l'axiomatisation des mathématiques.
- ▶ Il reste à savoir ce qui en est de la cohérence, de la complétude, et de la décidabilité.



- ▶ La même année, en 1908, Zermelo construit un système d'axiomes pour la théorie des ensembles.
- ▶ En dehors de l'*axiome d'extensionnalité*, on peut voir ces axiomes comme une restriction de la version contradictoire du *schéma d'axiomes de compréhension* aux cas particuliers utiles, qui ne permettent pas de dériver les paradoxes.
- ▶ Cela abouti plus tard au système ZF(C) (Zermelo-Fraenkel et axiome du choix), encore le plus prisé de nos jours.
- ▶ Cela résout effectivement le paradoxe en limitant les propriétés exprimables, et en fait un candidat à l'axiomatisation des mathématiques.
- ▶ À nouveaux, il reste à savoir ce qui en est de la cohérence, de la complétude, et de la décidabilité.

- ▶ En 1922, Hilbert précise son projet de formalisation de l'arithmétique en posant le Entscheidungsproblem (le *problème de la décision*).
- ▶ Il demande si il existe une procédure (un algorithme) permettant de vérifier si une expression formelle peut se déduire d'un système d'axiomes donnés.
- ▶ Cela aboutit en 1928 à un ambitieux programme de recherche qui s'articule autour de trois questions :
  - Les mathématiques sont-elles complètes ?
  - Les mathématiques sont-elles cohérentes ?
  - Les mathématiques sont-elles décidables ?

- ▶ En 1931, Gödel publie un article dans lequel il énonce ses deux théorèmes d'incomplétude, qui viennent répondre par la négative aux questions de Hilbert.
- ▶ Le premier théorème dit :  
« *Dans n'importe quelle théorie récursivement axiomatisable, cohérente et capable de "formaliser l'arithmétique", on peut construire un énoncé arithmétique qui ne peut être ni prouvé ni réfuté dans cette théorie.* »
- ▶ Le second théorème dit :  
« *Si  $T$  est une théorie cohérente qui satisfait des hypothèses analogues, la cohérence de  $T$ , qui peut s'exprimer dans la théorie  $T$ , n'est pas démontrable dans  $T$ .* »
- ▶ Ces deux théorèmes ont été démontrés pour l'arithmétique de Peano et donc pour les théories plus fortes que celle-ci, en particulier les théories destinées à fonder les mathématiques, telles que la théorie des ensembles ou les *Principia Mathematica*.

- ▶ Les liens entre la logique et l'informatique sont très forts.
- ▶ Ils existent notamment au travers du  $\lambda$ -calcul.

- ▶ Le  $\lambda$ -calcul est un système formel inventé par Church dans les années 1930.
- ▶ Il s'agit du premier formalisme permettant de caractériser les *fonctions récursives*, il a donc une grande importance en calculabilité, à l'égal des machines de Turing.

- ▶ L'idée de base du  $\lambda$ -calcul est que *tout est fonction*.
- ▶ Ces fonctions peuvent contenir des fonctions qui ne sont pas prédéfinies et qui sont alors des variables.
- ▶ La seule chose qu'on peut faire avec ces fonctions est de les *appliquer* à des valeurs (qui sont elles-mêmes des fonctions).

- ▶ La syntaxe du  $\lambda$ -calcul est minimaliste.
- ▶ Si  $E$  est une expression du  $\lambda$ -calcul (un  $\lambda$ -terme) alors  $E$  est soit :
  - une *variable* :  $x, y, \dots$  sont des  $\lambda$ -termes ;
  - une *application* :  $uv$  est un  $\lambda$ -terme si  $u$  et  $v$  sont des  $\lambda$ -termes ;
  - une *abstraction* :  $\lambda x.v$  est un  $\lambda$ -terme si  $x$  est une variable et  $v$  est un  $\lambda$ -terme.
- ▶ L'application  $uv$  peut être vue comme l'application d'une fonction  $u$  à la valeur  $v$ .
- ▶ L'abstraction  $\lambda x.v$  peut être vue comme la fonction qui à  $x$  associe  $v$  (où  $v$  contient généralement des occurrences de  $x$ ).

## Variables libres et variables liées

- ▶ Comme avec les quantificateurs classiques  $\exists$  et  $\forall$ , les variables sont *liées* par le  $\lambda$ .
- ▶ Les variables qui ne sont pas liées sont dites *libres*.
- ▶ Tout comme  $\forall x, P(x)$  est équivalent à  $\forall y, P(y)$ , les deux termes  $\lambda x.P$  et  $\lambda y.P[x/y]$  sont équivalents.
- ▶ Exemples :
  - Dans  $\lambda x.xy$ ,  $x$  est liée et  $y$  est libre, du coup il est équivalent à  $\lambda z.zy$  mais pas à  $\lambda x.xz$ .
  - Le terme  $\lambda b.\lambda n.banane$  est équivalent à  $\lambda p.\lambda t.patate$ .
- ▶ L'opération de renommage des variables liées, qui est parfois utiles pour clarifier un terme, s'appelle la  *$\alpha$ -conversion*.



- ▶ Le calcul se fait par *réduction*, défini comme une réécriture :
  - $(\lambda x.v)y \mapsto v[x/y]$ .
- ▶ Exemples :
  - $(\lambda x.xy)a \mapsto ay$ .
  - $(\lambda b.\lambda n.banane)p \mapsto \lambda n.panane$ .
  - $(\lambda n.panane)t \mapsto patate$ .
- ▶ On appelle cette opération la  *$\beta$ -réduction*.

$\lambda$ -calcul simplement typé

- ▶ Sans typage, le  $\lambda$ -calcul peut exprimer des paradoxes, ou du moins des calculs qui ne terminent pas, par exemple  $\lambda x.xx$  appliqué à lui même.
- ▶ En donnant au  $\lambda$ -calcul un typage simple, on peut réduire son expressivité.
- ▶ Les types peuvent être :
  - un type de base :  $\iota$ ,
  - si  $\tau_1$  et  $\tau_2$  sont des types, alors  $\tau_1 \rightarrow \tau_2$  est un type.

## Jugement de typage

- ▶ On appelle un *jugement de typage* les règles qui définissent le type d'un λ-terme en fonction de sa structure et des types des termes qui le compose.
- ▶ Dans le cas du λ-calcul simplement typé, ces règles sont :

$$\frac{}{\Gamma \vdash x : \tau \quad (\text{si } (x, \tau) \in \Gamma)} \text{ (ax)}$$

$$\frac{\Gamma \vdash u : \tau_1 \rightarrow \tau_2 \quad \Gamma \vdash v : \tau_1}{\Gamma \vdash uv : \tau_2} \text{ (app)}$$

$$\frac{\Gamma \cup \{(x, \tau_1)\} \vdash v : \tau_2}{\Gamma \vdash \lambda x.v : \tau_1 \rightarrow \tau_2} \text{ (abs)}$$

- ▶ La règle ax (axiome) se lit comme “dans l’environnement  $\Gamma$ , le terme  $x$  a le type  $\tau$ ”.
- ▶ La règle app (application) se lit comme “si dans l’environnement  $\Gamma$  le terme  $u$  est de type  $\tau_1 \rightarrow \tau_2$  et que dans ce même environnement  $\Gamma$  le terme  $v$  est de type  $\tau_1$ , alors le type du terme  $uv$  est  $\tau_2$ ”.
- ▶ La règle abs (abstraction) se lit comme “si dans l’environnement  $\Gamma$ , auquel on ajoute la règle que le terme  $x$  est de type  $\tau_1$  le terme  $v$  est de type  $\tau_2$  alors le type du terme  $\lambda x.v$  est  $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ ”.

## Termes correctement typés

- ▶ Si on donne (comme axiome) des types de base à nos variables on peut donc vérifier qu'un terme est correctement typé.
- ▶ Pour cela il faut qu'en partant du terme, on puisse remonter aux axiomes en utilisant seulement les règles de jugement de typage.
- ▶ On peut aisément comprendre qu'un terme tel que  $\lambda x.xx$  n'est pas correctement typable.

- ▶ L'isomorphisme de Curry-Howard définit une *correspondance entre preuves et programmes*.
- ▶ Une façon simple d'en avoir un aperçu est de regarder la règle `app` du  $\lambda$ -calcul simplement typé et de constater qu'il correspond tout à fait à la règle de déduction du *modus ponens*.
- ▶ Le *modus ponens* est la règle de déduction qui dit que si dans une théorie on a comme axiomes ou théorèmes
  - $A$ , et
  - $A \Rightarrow B$ ,

alors on peut en déduire que  $B$  est aussi un théorème de cette théorie.

- ▶ Je vous recommande fortement la lecture de *Logicomix*.

