

Méthodologie de la programmation

Pablo Rauzy

pr@up8.edu

pablo.rauzy.name/teaching/mdlp



UFR MITSIC / L1 informatique

Séance a

Un peu de logique

Un peu de logique

- ▶ L'*algèbre de Boole*, ou calcul booléen, ou logique booléenne, est une approche algébrique de la logique, vu en terme de variables, d'opérateurs, et de fonctions, particulièrement utile en informatique.
- ▶ Elle fut initiée en 1854 par le mathématicien britannique George Boole.
- ▶ On s'intéresse aujourd'hui seulement au cas avec deux éléments.

- ▶ On appelle \mathbb{B} l'ensemble constitué des deux *valeurs de vérité*, **vrai** et **faux**.
- ▶ Le plus souvent on note
 - $\mathbb{B} = \{\top, \perp\}$, ou
 - $\mathbb{B} = \{1, 0\}$.

- On définit plusieurs opérations de base sur B :
- la conjonction,
 - la disjonction, et
 - la négation.

- ▶ La *conjonction* est l'opération **et**.
- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note la conjonction de a et b
 - a AND b ,
 - a & b ,
 - $a \wedge b$,
 - $a \cdot b$, ou simplement
 - ab .
- ▶ La table de vérité de cette opération est

- ▶ La *conjonction* est l'opération **et**.
- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note la conjonction de a et b
 - a AND b ,
 - a & b ,
 - $a \wedge b$,
 - $a \cdot b$, ou simplement
 - ab .
- ▶ La table de vérité de cette opération est

a	b	$a \cdot b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- ▶ La *disjonction* est l'opération **ou**.
- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note la disjonction de a et b
 - a OR b ,
 - $a \mid b$,
 - $a \vee b$, ou
 - $a + b$.
- ▶ La table de vérité de cette opération est

- ▶ La *disjonction* est l'opération **ou**.
- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note la disjonction de a et b
 - a OR b ,
 - $a \mid b$,
 - $a \vee b$, ou
 - $a + b$.
- ▶ La table de vérité de cette opération est

a	b	$a + b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

- ▶ La *négation* est l'opération **non**.
- ▶ Si on a une variable $a \in \mathbb{B}$, on note la négation de a
 - NOT a ,
 - $!a$,
 - $\neg a$, ou
 - \bar{a} .
- ▶ La table de vérité de cette opération est

- ▶ La *négation* est l'opération **non**.
- ▶ Si on a une variable $a \in \mathbb{B}$, on note la négation de a
 - NOT a ,
 - $!a$,
 - $\neg a$, ou
 - \bar{a} .
- ▶ La table de vérité de cette opération est

a	\bar{a}
0	1
1	0

- ▶ En tant que structure, une algèbre de Boole est un *corps*.
- ▶ On y retrouve donc les propriétés de ce type de structure.

▶ $(a + b) + c = a + (b + c) = a + b + c.$

▶ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = a \cdot b \cdot c.$

Commutativité

▶ $a + b = b + a$

▶ $a \cdot b = b \cdot a$

▶ $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

▶ $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$

▶ $a + a = a$

▶ $a \cdot a = a$

▶ $a + 0 = a$

▶ $a \cdot 1 = a$

▶ $a \cdot 0 = 0$

▶ $a + 1 = 1$

- ▶ $\overline{\overline{a}} = a$
- ▶ $a \cdot \overline{a} = 0$
- ▶ $a + \overline{a} = 1$

1. Simplifier les formules suivantes :

- $a + \bar{a} \cdot b$
- $a \cdot (\bar{a} + b)$

2. Démontrer la loi d'absorption :

- $a + (a \cdot b) = a \cdot (a + b) = a$

3. Démontrer le théorème du consensus :

- $a \cdot b + \bar{a} \cdot c + b \cdot c = a \cdot b + \bar{a} \cdot c$

- ▶ Les lois de De Morgan sont des identités entre propositions logiques.
- ▶ Elles disent :
 1. La négation de la conjonction de deux formules est équivalente à la disjonction des négations de ces deux formules.
 2. La négation de la disjonction de deux formules est équivalente à la conjonction des négations de ces deux formules.
- ▶ Autrement dit, $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$, et $\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$.

- ▶ Certaines opérations booléennes peuvent être définies en fonction de celles qu'on a déjà vu :
 - le ou exclusif,
 - l'implication, et
 - l'équivalence.

- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note le **ou exclusif** de a et b
 - $a \text{ XOR } b$,
 - $a \wedge b$ ou
 - $a \oplus b$.
- ▶ La table de vérité de cette opération est

- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note le **ou exclusif** de a et b
 - a XOR b ,
 - $a \wedge b$ ou
 - $a \oplus b$.
- ▶ La table de vérité de cette opération est

a	b	$a \oplus b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note l'**implication** de a sur b
 - $a \Rightarrow b$.
- ▶ La table de vérité de cette opération est

- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note l'**implication** de a sur b
 - $a \Rightarrow b$.
- ▶ La table de vérité de cette opération est

a	b	$a \Rightarrow b$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note l'**équivalence** de a et b
 - $a \Leftrightarrow b$.
- ▶ La table de vérité de cette opération est

- ▶ Si on a deux variables $a, b \in \mathbb{B}$, on note l'**équivalence** de a et b
 - $a \Leftrightarrow b$.
- ▶ La table de vérité de cette opération est

a	b	$a \Leftrightarrow b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

1. Vérifier les lois de De Morgan à l'aide d'une table de vérité.
2. En utilisant seulement **et**, **ou**, et **non** :
 - exprimer $a \Rightarrow b$,
 - exprimer $a \Leftrightarrow b$.
3. Démontrer que $a \Leftrightarrow b = (a \Rightarrow b) \cdot (b \Rightarrow a)$.
4. (Bonus) Montrer qu'on peut tout faire avec juste NAND ($a \uparrow b = \overline{a \cdot b}$).

- ▶ Une *formule* est soit une formule atomique, soit une formule composée.
- ▶ Une formule atomique peut être :
 - \top (vrai),
 - \perp (faux),
 - une variable booléenne,
 - un *prédicat*.
- ▶ Si P et Q sont des formules, alors sont des formules composées :
 - $\neg P$,
 - $P \wedge Q$,
 - $P \vee Q$,
 - $P \Rightarrow Q$,
 - $P \Leftrightarrow Q$.
 - une formule *quantifiée*.

- ▶ Un *prédicat* est une propriété.
- ▶ Par exemple :
 - le prédicat d'égalité sur les entiers : $x = 42, y = 51$;
 - le prédicat d'appartenance sur les ensembles : $n \in A$;
 - le prédicat *couleur* sur les choses : $Couleur(ciel, bleu), Couleur(corbeau, noir)$.
- ▶ Ici, les entiers et le terme noir sont des constantes.

- Il existe deux quantificateurs :
- le quantificateur existentiel, et
 - le quantificateur universel.

Quantificateur existentiel

- ▶ Le quantificateur existentiel se note \exists .
- ▶ Si P est une formule, alors " $\exists x, P$ " signifie qu'il existe un x tel que P est vraie.
- ▶ Exemples :
 - Sur les booléens : $\exists a, a \vee b$.
 - Sur les entiers : $\exists n, n < 13$.

Quantificateur universel

- ▶ Le quantificateur universel se note \forall .
- ▶ Si P est une formule, alors " $\forall x, P$ " signifie que P est vrai pour tout x .
- ▶ Exemples :
 - Sur les booléens : $\forall a, a \vee \neg a$.
 - Sur les entiers : $\forall n, \exists m, n < m$.

Variables libres et variables liées

- ▶ Dans une formule, une variable est soit *libre* soit *liée* par un quantificateur.
- ▶ Par exemple dans la formule " $\exists a, a \vee b$ " :
 - la variable a est liée, et
 - la variable b est libre.

► La négation d'une formule quantifiée par un quantificateur est la négation de cette formule quantifiée par l'autre quantificateur :

- $\neg(\exists x, P) = \forall x, \neg P,$
- $\neg(\forall x, P) = \exists x, \neg P.$

► Exemples :

- $\neg(\exists x, f(x) = 0)$
 $= \forall x, f(x) \neq 0.$
- $\neg(\forall n, \exists m, n < m)$
 $= \exists n, \neg(\exists m, n < m)$
 $= \exists n, \forall m, \neg(n < m)$
 $= \exists n, \forall m, n \geq m.$

- ▶ Attention, l'implication logique n'est pas complètement intuitive !
- ▶ L'implication $P \Rightarrow Q$ exprime que :
 - Q est une *condition nécessaire* de P (mais pas forcément *suffisante*), et que
 - P est une *condition suffisante* de Q (mais pas forcément *nécessaire*).
- ▶ Par exemple l'implication « Si il pleut alors le sol est mouillé. » signifie qu'il n'est pas possible qu'il pleuve sans que le sol ne soit mouillé. Par contre, il est tout à fait possible que le sol soit mouillé sans qu'il ne pleuve.

- ▶ La *négation* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est la formule $P \wedge \neg Q$.
- ▶ En effet, on a vu que $P \Rightarrow Q = \neg P \vee Q$,
et par les lois de De Morgan on a que $\neg(\neg P \vee Q) = \neg\neg P \wedge \neg Q$.
- ▶ La négation de « Si il pleut alors le sol est mouillé. »
est donc « Il pleut et le sol n'est pas mouillé. ».

- ▶ La *réciproque* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $Q \Rightarrow P$.
- ▶ La réciproque de « Si il pleut alors le sol est mouillé. » est donc « Si le sol est mouillé alors il pleut. ».
- ▶ La réciproque d'une implication n'est pas équivalente à cette implication.

- ▶ La *contraposée* d'une implication $P \Rightarrow Q$ est l'implication $\neg Q \Rightarrow \neg P$.
- ▶ La contraposée de « Si il pleut alors le sol est mouillé. » est donc « Si le sol n'est pas mouillé alors il ne pleut pas. ».
- ▶ La contraposée d'une implication est équivalente à cette implication.

1. Les énoncés suivants sont-ils des formules ?
 - \top ,
 - 17,
 - $(\perp \Rightarrow a) \wedge (a \Rightarrow \top)$,
 - $\forall x, Corbeau(x) \Rightarrow Couleur(x, noir)$.
2. Dans les deux derniers énoncés, quelles sont les variables ? Sont-elles libres ou liées ?
3. Quelle est la négation du dernier énoncé ?
4. En oubliant son quantificateur, quelle est sa réciproque ? Et sa contraposée ?
5. Soit E la formule vraie quand les éoliennes tournent, et V la formule vraie quand le vent souffle.
 - Quelle formule est vraie : $E \Rightarrow V$, $V \Rightarrow E$, ou $E \Leftrightarrow V$? (et en français ?)
 - Quelle est la négation de la formule vraie ? (en formule et en français)
 - Quelle est sa réciproque ? Et sa négation ? (idem)
 - Quelle est sa contraposée ? Et sa négation ? (idem)